Prof. Annette Huber-Klawitter
Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Christoph Brackenhofer

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2024/25

Semi-algebraische Geometrie
Blatt 1

Abgabe: 25.10. 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.**

Zeigen Sie, dass das kartesische Produkt $A \times B$ zweier semi-algebraischen Mengen $A \subset \mathbb{R}^m$ und $B \subset \mathbb{R}^n$ wiederum semi-algebraisch ist.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.**

Gegeben einen angeordneten Körper K, betrachten wir die Menge $K[[T^{\mathbb{Q}}]]$ der formalen Reihen

$$f = \sum_{q \in \mathbb{Q}} a_q T^q,$$

mit a_q in K derart, dass jede nichtleere Teilmenge von $\{q \in \mathbb{Q} \mid a_q \neq 0\}$ ein kleinstes Element besitzt.

Die Addition und Multiplikation werden auf $K[[T^{\mathbb{Q}}]]$ durch

$$f + g = \sum_{q \in \mathbb{Q}} (a_q + b_q) T^q \quad \text{und} \quad f \cdot g = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \sum_{q' + q'' = q} a_{q'} b_{q''} T^q,$$

definiert, falls

$$f = \sum_{q \in \mathbb{Q}} a_q T^q \text{ und } g = \sum_{q \in \mathbb{Q}} b_q T^q.$$

Zudem definieren wir eine Ordnung auf $K[[T^{\mathbb{Q}}]]$, indem wir auf der Menge der Koeffizienten die lexikografische Ordnung verwenden, d.h.

$$f > g \iff \text{es gibt ein } \tilde{q} \text{ in } \mathbb{Q} \text{ derart, dass } a_{\tilde{q}} > b_{\tilde{q}} \text{ und } a_q = b_q \text{ für alle } q < \tilde{q}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $K[[T^{\mathbb{Q}}]]$ ein angeordneter Körper ist.

(ii) Für $K = \mathbb{R}$, zeigen Sie, dass jedes positive Element f aus $\mathbb{R}[[T^{\mathbb{Q}}]]$ eine Wurzel g in $\mathbb{R}[[T^{\mathbb{Q}}]]$ besitzt, d.h. $g^2 = f$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.**

Bestimmen Sie die Normalformen der folgenden semi-algebraischen Mengen:

(i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (2 \geq xyz \geq -2) \wedge (x^2 + y^2 \leq 1) \wedge ((z < -1) \vee (z > 1))\}$

(ii) $(U(-xy))^c \cap ((U(x) \cap U(y))^c) \cap ((U(-x) \cap U(-y))^c)^c \subset \mathbb{R}^2$

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.**

Bestimmen Sie den Abschluss der semi-algebraischen Menge

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - x^2 - y^2 > 0\}$$

und fertigen Sie eine Skizze davon an.

Vergleichen Sie A mit der Menge $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - x^2 - y^2 \geq 0\}$.

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach 47 im dritten Stock des mathematischen Instituts.